Топологическая теория разрешимости уравнений в элементарных функциях

Зайцев Р.В.   Научный руководитель: Канель-Белов А.Я.

Московский физико-технический институт

29 июня, 2021

Аннотация

В этой работе рассматривается применение топологической теории Галуа к анализу трансцендентных уравнений на разрешимость в элементарных функциях. Излагаются общие теоретические сведения и доказывается неразрешимость уравнений $\tan(x) - x = a$ и $x^x = a$ в радикалах.

Содержание

Задача

Задано

- Изначальное множество объектов S
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$

Задача

Задано

- Изначальное множество объектов S
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$

Вопрос

Можно ли выразить какой-то объект применяя операции из заданного семейства $\mathcal{F}$ к исходным объектам S?

Разрешимость в радикалах

Задача

Выразить корень уравнения $P(x) = 0$, где P - многочлен, через алгебраические операции и радикалы.

Разрешимость в радикалах

Задача

Выразить корень уравнения $P(x) = 0$, где P - многочлен, через алгебраические операции и радикалы.

- Изначальное множество S - симметрические многочлены

Разрешимость в радикалах

Задача

Выразить корень уравнения $P(x) = 0$, где P - многочлен, через алгебраические операции и радикалы.

- Изначальное множество S - симметрические многочлены
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические (сложение, вычитание, умножение, деление) и корень натуральной степени, т.е. $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Разрешимость в радикалах

Задача

Выразить корень уравнения $P(x) = 0$, где P - многочлен, через алгебраические операции и радикалы.

- Изначальное множество S - симметрические многочлены
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические (сложение, вычитание, умножение, деление) и корень натуральной степени, т.е. $f(x) = \sqrt[n]{x}$
- Объект, который нужно выразить - x_1

Предложенные решения

- Руффини (неполное доказательство) [Ruffini 1799]

Предложенные решения

- Руффини (неполное доказательство) [Ruffini 1799]
- Абель [Abel 1824]

Предложенные решения

- Руффини (неполное доказательство) [Ruffini 1799]
- Абель [Abel 1824]
- Галуа в 1846 году

Теорема

Алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима

Предложенные решения

- Руффини (неполное доказательство) [Ruffini 1799]
- Абель [Abel 1824]
- Галуа в 1846 году

Теорема

Алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима

Жордан показал, что группа Галуа алгебраического уравнения изоморфна группе монодромии корня (который понимается как многозначная функция) [Хованский 2008].

Предложенные решения

- Руффини (неполное доказательство) [Ruffini 1799]
- Абель [Abel 1824]
- Галуа в 1846 году

Теорема

Алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима

Жордан показал, что группа Галуа алгебраического уравнения изоморфна группе монодромии корня (который понимается как многозначная функция) [Хованский 2008].
В.И. Арнольд обобщил эти результаты и доказал топологическую неразрешимость ряда задач.

Выразимость интеграла в обобщенных элементарных функциях

Определение

Элементарные функции - это логарифм, экспонента, тригонометрические и гиперболические функции и их обратные.

Выразимость интеграла в обобщенных элементарных функциях

Определение

Элементарные функции - это логарифм, экспонента, тригонометрические и гиперболические функции и их обратные.

Задача

Выразить неопределенный интеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ от обобщенной элементарной функции f через обобщенные элементарные функции

Выразимость интеграла в обобщенных элементарных функциях

Определение

Элементарные функции - это логарифм, экспонента, тригонометрические и гиперболические функции и их обратные.

Задача

Выразить неопределенный интеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ от обобщенной элементарной функции f через обобщенные элементарные функции

- Изначальное множество S - $\mathbb{C}(x)$

Выразимость интеграла в обобщенных элементарных функциях

Определение

Элементарные функции - это логарифм, экспонента, тригонометрические и гиперболические функции и их обратные.

Задача

Выразить неопределенный интеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ от обобщенной элементарной функции f через обобщенные элементарные функции

- Изначальное множество S - $\mathbb{C}(x)$
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические, элементарные функции и решение алгебраических уравнений

Решение Лиувилля

Операцию взятия композиции можно заменить на операцию решения определенного дифференциального уравнения.

Решение Лиувилля

Операцию взятия композиции можно заменить на операцию решения определенного дифференциального уравнения.

Пример

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow y' = y$$

Решение Лиувилля

Операцию взятия композиции можно заменить на операцию решения определенного дифференциального уравнения.

Пример

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow y' = y$$

Определение

Дифференциальное поле - это поле, на котором определена операция дифференцирования, удовлетворяющая правилу Лейбница

Решение Лиувилля

Используя метод, не связанный с теорией групп, Лиувилль доказал следующую теорему [Ritt 1948]

Теорема (Лиувилля об интегралах)

Неопределенный интеграл

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, f(t) \in K$$

принадлежит дифференциальному полю K если и только если

$$y(x) = A_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(A_i(x)), A_i(x) \in K$$

Разрешимость дифференциальных уравнений в квадратурах

- Изначальное множество S - дифференциальное поле

Разрешимость дифференциальных уравнений в квадратурах

- Изначальное множество S - дифференциальное поле
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические, элементарные функции, дифференцирование и интегрирование

Разрешимость дифференциальных уравнений в квадратурах

- Изначальное множество S - дифференциальное поле
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические, элементарные функции, дифференцирование и интегрирование

Задача

Выразить решение дифференциального уравнения $Ly = 0$ в квадратурах, где L - дифференциальный оператор

Разрешимость линейных дифференциальных уравнений в квадратурах

Метод Лиувилля не опирается на теорию групп

Разрешимость линейных дифференциальных уравнений в квадратурах

Метод Лиувилля не опирается на теорию групп
Пикар обнаружил сходство между линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями и построил дифференциальный аналог теории Галуа [Vessiot 1910]

Разрешимость линейных дифференциальных уравнений в квадратурах

Метод Лиувилля не опирается на теорию групп

Пикар обнаружил сходство между линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями и построил дифференциальный аналог теории Галуа [Vessiot 1910]

Теорема (Пикара-Вессио)

Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в квадратурах, если и только если группа Галуа уравнения над полем K является разрешимой

Разрешимость линейных дифференциальных уравнений в квадратурах

Метод Лиувилля не опирается на теорию групп
Пикар обнаружил сходство между линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями и построил дифференциальный аналог теории Галуа [Vessiot 1910]

Теорема (Пикара-Вессио)

Линейное дифференциальное уравнение над дифференциальным полем K решается в квадратурах, если и только если группа Галуа уравнения над полем K является разрешимой

Из теории Пикара-Вессио вытекает более сильная теорема о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах, а именно, что при неразрешимости группы Галуа, уравнение неразрешимо в квадратурах.

Содержание

Многозначные функции и группа монодромии

Определение

Элемент - это пара (f, U), *где* f *- голоморфная на области* $U \subset \mathbb{C}$ *функция*

Многозначные функции и группа монодромии

Определение

Элемент - это пара (f, U), *где* f *- голоморфная на области* $U \subset \mathbb{C}$ *функция*

Определение

Росток функции f *в точке* $a \in \mathbb{C}$ *- это класс эквивалентности элементов, совпадающих с* f *в некоторой окрестности точки* a. *Другими словами, два элемента* $(f, U_a), (g, V_a)$ *называются эквивалентными, если существует* $W_a \subset U_a \cap V_a$ *т.ч.* $(f, W_a) = (g, W_a)$

Многозначные функции и группа монодромии

Рассмотрим петлю в точке a, не содержащую особых точек функции f. Тогда вдоль этой петли можно продолжить любой росток функции f, причем в конце петли ростки переставятся между собой. Зафиксируем точку a.

Определение

Группа монодромии - это группа всевозможных перестановок ростков, при продолжении вдоль петель, не содержащих особых точек

Многозначные функции и группа монодромии

Наблюдение

Для голоморфной на комплексной области функции группа монодромии тривиальна.

Многозначные функции и группа монодромии

Наблюдение

Для голоморфной на комплексной области функции группа монодромии тривиальна.

Наблюдение

Перестановки, индуцированные гомотопными в области не содержащей особых точек петлями, совпадают.

Группа монодромии логарифма и экспоненты

- Экспонента - однозначная функция, поэтому группа монодромии тривиальна

Группа монодромии логарифма и экспоненты

- Экспонента - однозначная функция, поэтому группа монодромии тривиальна
- У логарифма ровно одна особая точка - 0

Группа монодромии логарифма и экспоненты

- Экспонента - однозначная функция, поэтому группа монодромии тривиальна
- У логарифма ровно одна особая точка - 0
- Все ростки функции принимают значение $r_0 + 2\pi i$, где r_0 - значение какого-то фиксированного ростка в точке a

Группа монодромии логарифма и экспоненты

- Экспонента - однозначная функция, поэтому группа монодромии тривиальна
- У логарифма ровно одна особая точка - 0
- Все ростки функции принимают значение $r_0 + 2\pi i$, где r_0 - значение какого-то фиксированного ростка в точке a
- При одном обходе окружности $|z| = |a|$, росток r переходит в росток $r \pm 2\pi i$

Группа монодромии логарифма и экспоненты

- Экспонента - однозначная функция, поэтому группа монодромии тривиальна
- У логарифма ровно одна особая точка - 0
- Все ростки функции принимают значение $r_0 + 2\pi i$, где r_0 - значение какого-то фиксированного ростка в точке a
- При одном обходе окружности $|z| = |a|$, росток r переходит в росток $r \pm 2\pi i$
- Группа монодромии логарифма - $\mathbb{Z}$

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Пусть задано параметрическое уравнение $f(x) = a$, где a - комплексный параметр. Будем говорить, что это уравнение разрешимо в элементарных функциях, если при помощи композиции элементарных функций и алгебраических операций можно выразить корень этого уравнения через параметр a.

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Пусть задано параметрическое уравнение $f(x) = a$, где a - комплексный параметр. Будем говорить, что это уравнение разрешимо в элементарных функциях, если при помощи композиции элементарных функций и алгебраических операций можно выразить корень этого уравнения через параметр a.

- Изначальное множество $S = \mathbb{C}(a)$

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Пусть задано параметрическое уравнение $f(x) = a$, где a - комплексный параметр. Будем говорить, что это уравнение разрешимо в элементарных функциях, если при помощи композиции элементарных функций и алгебраических операций можно выразить корень этого уравнения через параметр a.

- Изначальное множество $S = \mathbb{C}(a)$
- Семейство допустимых операций $\mathcal{F}$ - алгебраические, элементарные функции

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Наблюдение

Вместо элементарных функций достаточно взять лишь логарифм и экспоненту

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Наблюдение

Вместо элементарных функций достаточно взять лишь логарифм и экспоненту

Доказательство

Гиперболические и тригонометрические функции (и их обратные) легко выражаются через логарифм и экспоненту при помощи алгебраических операций.

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Определение

Глубина $d(f)$ формулы f, выразимой в элементарных функциях определяется рекурсивно.

- *Если $f \in \mathbb{C}(a)$, то глубина формулы $d(f) = 0$*

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Определение

Глубина $d(f)$ формулы f, выразимой в элементарных функциях определяется рекурсивно.

- *Если $f \in \mathbb{C}(a)$, то глубина формулы $d(f) = 0$*
- *Более общо, если f получается применением к формулам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ алгебраических операций, то $d(f) = max_{1 \leq i \leq n} d(f_i)$*

Разрешимость уравнения в элементарных функциях

Определение

Глубина $d(f)$ формулы f, выразимой в элементарных функциях определяется рекурсивно.

- *Если $f \in \mathbb{C}(a)$, то глубина формулы $d(f) = 0$*
- *Более общо, если f получается применением к формулам $f_1, f_2, \dots, f_n$ алгебраических операций, то $d(f) = max_{1 \le i \le n} d(f_i)$*
- *Если $f = u(g)$ и u - логарифм или экспонента, то $d(f) = d(g) + 1$*

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Корень уравнения, $f^{-1}(a)$ - многозначная функция

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Корень уравнения, $f^{-1}(a)$ - многозначная функция

Определение

Группой монодромии уравнения $f(x) = a$ будем называть группу монодромии f^{-1}.

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Корень уравнения, $f^{-1}(a)$ - многозначная функция

Определение

Группой монодромии уравнения $f(x) = a$ будем называть группу монодромии f^{-1}.

Теорема

Если уравнение разрешимо в элементарных функциях, то его группа монодромии разрешима

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Доказательство

- Докажем по индукции, что для всех формул глубины n, n-й коммутант группы монодромии тривиален.

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Доказательство

- Докажем по индукции, что для всех формул глубины n, n-й коммутант группы монодромии тривиален.
- База: глубина формулы ноль $\Rightarrow$ рациональная функция $\Rightarrow$ группа монодромии тривиальна.

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Доказательство (продолжение)

- Переход: пусть для всех формул глубины $n-1$ группа разрешима, то есть ряд коммутантов заканчивается на тривиальной группе.

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Доказательство (продолжение)

- Переход: пусть для всех формул глубины $n-1$ группа разрешима, то есть ряд коммутантов заканчивается на тривиальной группе.
- На формуле вида $u(f_{n-1}(a))$, где u - либо экспонента, либо логарифм, а f_{n-1} - формула глубины не более чем $n-1$, $(n-1)$-й коммутант действует коммутативно. Действительно, поскольку на f_{n-1} индуцируются лишь тривиальные перестановки, каждый росток f_{n-1} делает петлю. Стало быть $(n-1)$-й коммутант является подгруппой группы монодромии u, которая, в свою очередь, абелева.

Теорема о разрешимости в элементарных функциях

Доказательство (продолжение)

- *Произвольная формула глубины n получается при помощи алгебраических операций с формулами такого вида $\Rightarrow$ на произвольной формуле действие $(n-1)$-го коммутанта также коммутативно $\Rightarrow$ n-й коммутант тривиален.*

Особые точки

Замечание

- *Если* $f'(x) \neq 0$*, то точка* $f(x)$ *заведомо не является особой в силу теоремы о неявной функции*

Особые точки

Замечание

- *Если* $f'(x) \neq 0$, *то точка* $f(x)$ *заведомо не является особой в силу теоремы о неявной функции*
- *Если уравнение разрешимо в элементарных функциях, то группа, порожденная петлями в области* $\{y : y = f(x), f'(x) \neq 0\}$ *разрешима, как и любая подгруппа монодромии.*

Особые точки

Замечание

- *Если* $f'(x) \neq 0$, *то точка* $f(x)$ *заведомо не является особой в силу теоремы о неявной функции*
- *Если уравнение разрешимо в элементарных функциях, то группа, порожденная петлями в области* $\{y : y = f(x), f'(x) \neq 0\}$ *разрешима, как и любая подгруппа монодромии.*

Определение

Группа уравнения $f(x) = a$ *- это подгруппа группы монодромии* f^{-1}, *порожденная петлями в области* $\{y : y = f(x), f'(x) \neq 0\}$

Особые точки

Определение

Особые точки уравнения - это множество $\{y : y = f(x), f'(x) = 0\}$

Особые точки

Определение

Особые точки уравнения - это множество $\{y : y = f(x), f'(x) = 0\}$

Определение

Особые корни уравнения - это множество $\{x : f'(x) = 0\}$

Особые точки

Наблюдение

Если множество особых точек уравнения нигде не плотно, то группа уравнения транзитивно действует на ростках.

Особые точки

Наблюдение

Если множество особых точек уравнения нигде не плотно, то группа уравнения транзитивно действует на ростках.

Доказательство

Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, *соединяющую два корня* r_1, r_2, *т.е.* $\gamma(0) = r_1, \gamma(1) = r_2$ *и лежащую вне множества* $\{x : f'(x) = 0\}$ *(такая кривая существует, т.к. множество* $\{x : f'(x) = 0\}$ *нигде не плотно). Тогда* $a(t) = f(\gamma(t))$ *является искомой петлей, отображающей* r_1 *в* r_2. *Действительно,*

$$a(0) = f(\gamma(0)) = f(r_1) = f(r_2) = f(\gamma(1)) = a(1)$$

Содержание

Особые точки уравнения

До конца этого раздела, положим $f(x) = \tan(x) - x$

Особые точки уравнения

До конца этого раздела, положим $f(x) = \tan(x) - x$

Лемма

Особые корни и точки уравнения $f(x) = a$ - это $\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Особые точки уравнения

До конца этого раздела, положим $f(x) = \tan(x) - x$

Лемма

Особые корни и точки уравнения $f(x) = a$ *- это* $\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Доказательство

$$f'(x) = (\tan(x) - x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Подставляя эти значения в функцию f, *получаем множество особых точек*

$$\tan(\pi k) - \pi k = -\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Особые точки уравнения

Лемма

Все особые корни уравнения являются имеют кратность 3.

Особые точки уравнения

Лемма

Все особые корни уравнения являются имеют кратность 3.

Доказательство

$$f''(\pi k) = \frac{2\sin(\pi k)}{\cos^3(\pi k)} = 0$$

$$f'''(\pi k) = \frac{2}{\cos^2(\pi k)} + \frac{6\sin^2(\pi k)}{\cos^4(\pi k)} = 2$$

Особые точки уравнения

Лемма

Все особые корни уравнения являются имеют кратность 3.

Доказательство

$$f''(\pi k) = \frac{2\sin(\pi k)}{\cos^3(\pi k)} = 0$$

$$f'''(\pi k) = \frac{2}{\cos^2(\pi k)} + \frac{6\sin^2(\pi k)}{\cos^4(\pi k)} = 2$$

Следствие

Если параметр a делает окружность вокруг особой точки, три корня переставляются между собой циклически.

Корни уравнения

Лемма

Все корни уравнения

$$\tan(z) - z = 0$$

вещественны

Корни уравнения

Лемма

Все корни уравнения

$$\tan(z) - z = 0$$

вещественны

Теорема (Руше)

Если две голоморфные в некоторой области функции f и g таковы, что на границе этой области $|g(z)| < |f(z)|$, то уравнения $f(z) = 0$ и $f(z) + g(z) = 0$ имеют одинаковое число корней.

Корни уравнения

Доказательство леммы

$$\tan(z) - z = 0 \Leftrightarrow \sin(z) - z\cos(z) = 0$$

Положим $z = x + iy$, тогда

$$\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

откуда

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2(x)\cosh^2(y)+\cos^2(x)\sinh^2(y) = \sin^2(x)+\sinh^2(y)$$

Аналогично

$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2(x)\cosh^2(y)+\sin^2(x)\sinh^2(y) = \cos^2(x)+\sinh^2(y)$$

Корни уравнения

Доказательство (продолжение)

Положим
$$f(z) = -z\cos(z), g(z) = \sin(z)$$
и рассмотрим прямоугольник с центром в нуле и верхним правым углом в точке
$$\pi k + iM, k \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}$$
Тогда на левой и правой сторонах прямоугольника
$$|g(z)|^2 = \sin^2(\pi k) + \sinh^2(y) = \sinh^2(y) < \\ < 1 + \sinh^2(y) = \cos^2(\pi k) + \sinh^2(y) < |z\cos(z)|^2 = |f(z)|^2 \quad (2)$$
поскольку $|z| \geq \operatorname{Re} z = \pi k$

Корни уравнения

Доказательство (продолжение)

На верхней и нижней сторонах

$$|g(z)|^2 \leq 1 + \sinh^2(M)$$

и

$$|f(z)|^2 \geq |z|^2 \sinh^2(M) \geq M^2 \sinh^2(M) > 1 + \sinh^2(M)$$

для всех достаточно больших M. Отсюда, по теореме Руше $\tan(z) - z$ имеет в точности $2k+1$ корней в любом таком достаточно высоком прямоугольнике с фиксированной шириной, поскольку корнями уравнения $z\cos(z) = 0$ являются

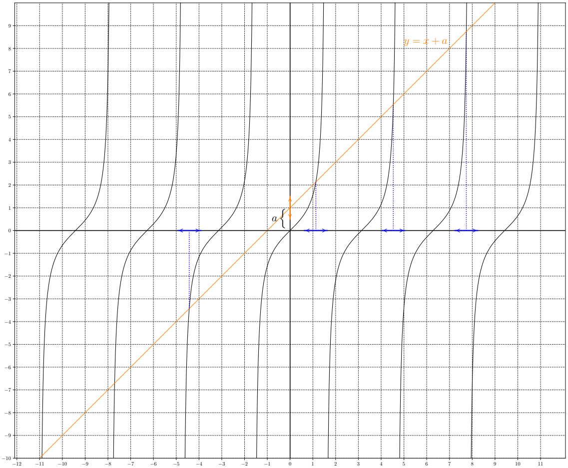
$$\{0, \pm\pi/2, \ldots, \pm(\pi k - \pi/2)\}$$

Корни уравнения

Доказательство (продолжение)

У исходного уравнения имеется ровно $2k+1$ *корней, которые мы можем явно перечислить:* 0 *- особый корень уравнения кратности* 3, *а также, как видно на рис., графики функций* $y = \tan(x)$ *и* $y = x$ *имеют в точности* $2k-1$ *пересечений, поскольку на каждом интервале вида* $(\pi m - \pi/2, \pi m + \pi/2)$, $-k < m < k$, $m \in \mathbb{Z}$ *имеется ровно одно пересечение при* $a = 0$.
Устремляя высоту прямоуголька к бесконечности, получаем, что других корней у уравнения быть не может, стало быть все корни вещественны. $\square$

Графики функций $\tan(x)$ и $x + a$



Корни уравнения

Наблюдение

При вещественном a не являющимся особой точкой, имеется в точности два комплексных корня, причем в силу $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ *эти корни комплексно сопряжены. Поэтому при обходе параметром a особой точки, будут циклически переставлены эти два комплексных корня и один вещественный.*

Вычисление перестановки

- Зафиксируем начальное значение параметра, $a_0 = 1$ и будем вычислять перестановки, которые индуцируют петли, с концами в этой точке.

Вычисление перестановки

- Зафиксируем начальное значение параметра, $a_0 = 1$ и будем вычислять перестановки, которые индуцируют петли, с концами в этой точке.
- Рассмотрим петлю, которая идет вдоль вещественной оси в левую сторону и обходит особые точки по малым полуокрожностям, затем делает оборот вокруг особой точки и возвращается тем же путем.

Вычисление перестановки

Выясним, как при этом переставляются корни.

Вычисление перестановки

Выясним, как при этом переставляются корни.

- Назовем два комплексных корня c_+ и c_-, где c_+ - корень, который лежит в верхней полуплоскости, а c_- - сопряженный ему.

Вычисление перестановки

Выясним, как при этом переставляются корни.

- Назовем два комплексных корня c_+ и c_-, где c_+ - корень, который лежит в верхней полуплоскости, а c_- - сопряженный ему.
- Вещественные корни обозначим естественным образом, т.е. так, что r_0 - корень, который стремится к нулю при $a \to 0$, r_1 - следующий за ним вещественный корень и так далее.

Вычисление перестановки

- Заметим, что при обходе особой точки по малой полуокружности, один из комплексных корней встает на вещественную ось (по той же причине, что при полном обороте происходит циклическая перестановка).

Вычисление перестановки

- Заметим, что при обходе особой точки по малой полуокружности, один из комплексных корней встает на вещественную ось (по той же причине, что при полном обороте происходит циклическая перестановка).
- Выберем такую полуокружность, чтобы на вещественную ось вставал именно верхний корень. Тогда корень, который был вещественным встанет на его место, т.е. окажется в верхней полуплоскости.

Вычисление перестановки

- Заметим, что при обходе особой точки по малой полуокружности, один из комплексных корней встает на вещественную ось (по той же причине, что при полном обороте происходит циклическая перестановка).
- Выберем такую полуокружность, чтобы на вещественную ось вставал именно верхний корень. Тогда корень, который был вещественным встанет на его место, т.е. окажется в верхней полуплоскости.
- Двигая влево параметр a приближая его, таким образом, к особой точке, сначала корень c_+ занимает место r_0, затем r_0 меняется с r_1 и так далее.

Вычисление перестановки

- Если изначально вещественные корни расположены как $(r_0, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1} \ldots)$, то на тот момент, когда параметр a приблизится к особой точке, которую он будет обходить, корни будут в расположении $(c_+, r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}, r_n, r_{n+1} \ldots)$.

Вычисление перестановки

- Если изначально вещественные корни расположены как $(r_0, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1} \ldots)$, то на тот момент, когда параметр a приблизится к особой точке, которую он будет обходить, корни будут в расположении $(c_+, r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}, r_n, r_{n+1} \ldots)$.
- Когда a обойдет особую точку, произойдет циклическая перестановка корней r_{n-1}, r_n, c_-.

Вычисление перестановки

- Если изначально вещественные корни расположены как $(r_0, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1} \ldots)$, то на тот момент, когда параметр a приблизится к особой точке, которую он будет обходить, корни будут в расположении $(c_+, r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}, r_n, r_{n+1} \ldots)$.
- Когда a обойдет особую точку, произойдет циклическая перестановка корней r_{n-1}, r_n, c_-.
- Выбрав подходящее направление обхода, можно добиться того, чтобы получилось расположение

$$(c_+, r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}, c_-, r_{n+1} \ldots)$$

в верхней полуплоскости оказался бы корень r_n, а в нижней r_{n-1}.

Вычисление перестановки

- Возвращаясь по тому же пути, когда параметр a вернется в исходное положение, корни будут располагаться как $(r_0, r_1, \ldots r_{n-2}, r_n, c_-, r_{n+1} \ldots)$, в верхней полуплоскости по-прежнему будет корень c_+, а в нижней r_{n-1}.

Вычисление перестановки

- Возвращаясь по тому же пути, когда параметр a вернется в исходное положение, корни будут располагаться как $(r_0, r_1, \ldots r_{n-2}, r_n, c_-, r_{n+1} \ldots)$, в верхней полуплоскости по-прежнему будет корень c_+, а в нижней r_{n-1}.
- Повторяя аналогичную петлю, но делая оборот вокруг следующей особой точки, получаем конфигурацию корней $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}, r_n, r_{n+1}, r_{n-1} \ldots)$

Неразрешимость

Утверждение

Уравнение $\tan(x) - x = a$ *не разрешимо в элементарных функциях*

Неразрешимость

Утверждение

Уравнение $\tan(x) - x = a$ *не разрешимо в элементарных функциях*

Доказательство

- *Группа заведомо содержит перестановки вида* $(k, k-1, k+1)$, *которые порождают знакопеременную группу* A_n *(если ограничить* $k \leq n$*)*

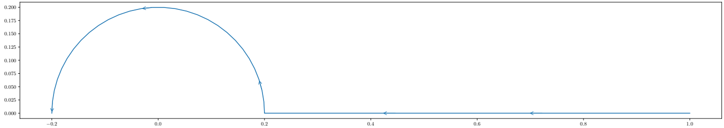
Неразрешимость

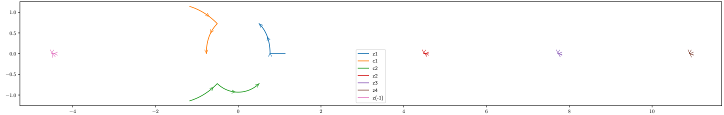
Утверждение

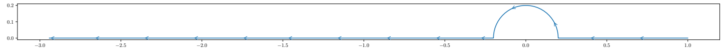
Уравнение $\tan(x) - x = a$ *не разрешимо в элементарных функциях*

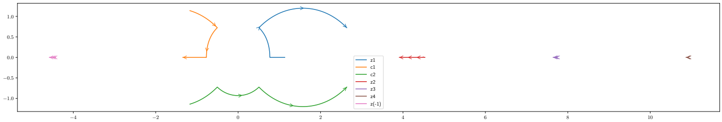
Доказательство

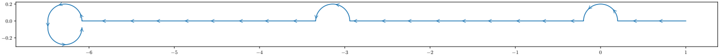
- *Группа заведомо содержит перестановки вида* $(k, k-1, k+1)$, *которые порождают знакопеременную группу* A_n *(если ограничить* $k \leq n$*)*
- *При* $n \geq 5$ *группа* A_n *неразрешима*

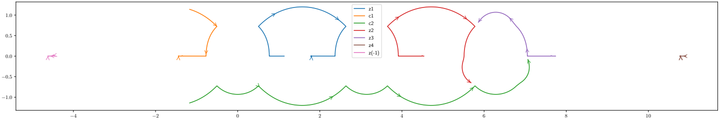



z1
c1
c2
z2
z3
z4
z(-1)

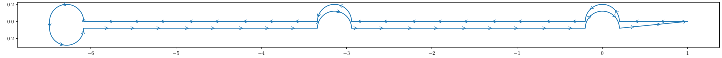


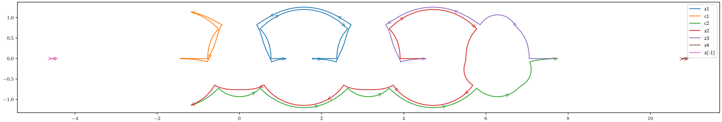

z1
c1
c2
z2
z3
z4
z(-1)





z1
c1
c2
z2
z3
z4
z(-1)




z1
c1
c2
z2
z3
z4
z(-1)

Содержание

Преобразование уравнения

Логарифмируя обе части уравнения $x^x = a$ дважды и делая замену

$$\ln\ln x \to x, \;\; \ln\ln a \to a$$

приходим к уравнению

$$x + e^x = a$$

Преобразование уравнения

Логарифмируя обе части уравнения $x^x = a$ дважды и делая замену

$$\ln \ln x \to x, \ \ln \ln a \to a$$

приходим к уравнению

$$x + e^x = a$$

До конца этого раздела, положим $f(x) = x + e^x$

Особые точки уравнения

Утверждение

Особыми корнями уравнения являются

$$r_n = (2n+1)\pi i, n \in \mathbb{Z}$$

а особыми точками

$$a_n = (2n+1)\pi i - 1, n \in \mathbb{Z}$$

Особые точки уравнения

Утверждение

Особыми корнями уравнения являются

$$r_n = (2n+1)\pi i, n \in \mathbb{Z}$$

а особыми точками

$$a_n = (2n+1)\pi i - 1, n \in \mathbb{Z}$$

Доказательство

$$f(z) = z + e^z \Rightarrow f'(z) = 1 + e^z$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \Leftrightarrow z = (2n+1)\pi i, n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n = f((2n+1)\pi i) = (2n+1)\pi i - 1, n \in \mathbb{Z}$$

Особые точки уравнения

Поскольку

$$f''(z) = e^z \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$$

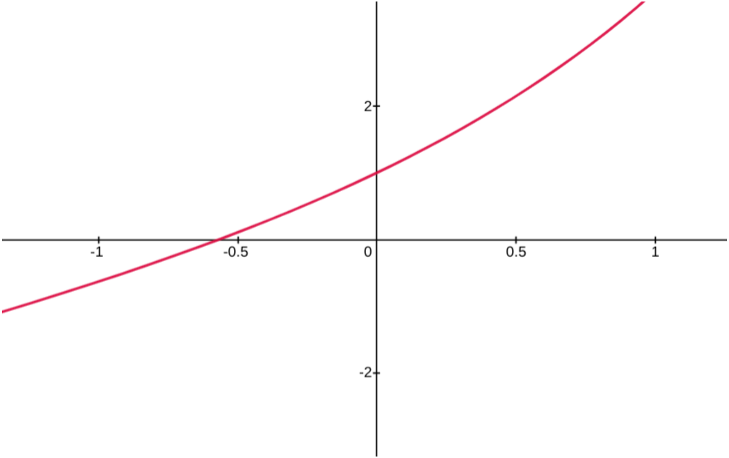
все особые корни имеют порядок 2, а значит если петля обходит произвольную особую точку, происходит транспозиция двух корней.

Вычисление перестановки

Из графика функции $f(x), x \in \mathbb{R}$ видно, что имеется ровно один вещественный корень уравнения $f(x) = 0$.

Вычисление перестановки

Из графика функции $f(x), x \in \mathbb{R}$ видно, что имеется ровно один вещественный корень уравнения $f(x) = 0$.



Вычисление перестановки

- Рассмотрим путь $r(t)$ этого вещественного корня, который подводит его к r_n, затем переставляет его с другим корнем, и дальше новый корень возвращается по тому же пути, по которому подходил вещественный корень.

Вычисление перестановки

- Рассмотрим путь $r(t)$ этого вещественного корня, который подводит его к r_n, затем переставляет его с другим корнем, и дальше новый корень возвращается по тому же пути, по которому подходил вещественный корень.
- Положим $a(t) = f(r(t))$.

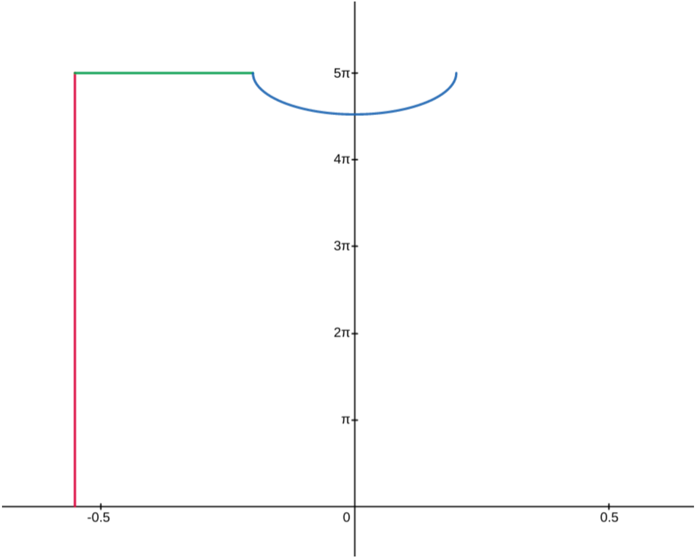
Вычисление перестановки

- Рассмотрим путь $r(t)$ этого вещественного корня, который подводит его к r_n, затем переставляет его с другим корнем, и дальше новый корень возвращается по тому же пути, по которому подходил вещественный корень.
- Положим $a(t) = f(r(t))$.
- Тогда $a(t)$ описывает петлю и индуцирует транспозицию вида $(1m)$, где m какой-то корень.

Вычисление перестановки

- Рассмотрим путь $r(t)$ этого вещественного корня, который подводит его к r_n, затем переставляет его с другим корнем, и дальше новый корень возвращается по тому же пути, по которому подходил вещественный корень.
- Положим $a(t) = f(r(t))$.
- Тогда $a(t)$ описывает петлю и индуцирует транспозицию вида $(1m)$, где m какой-то корень.
- Вычислим непосредственно путь, по которому движется параметр a.

Вычисление перестановки



Вычисление перестановки

- На первом (вертикальном) отрезке пути, имеем

$$r(t) = x + it$$

где x - вещественный корень уравнения $f(x) = 0$.

$$a(t) = x + it + e^{x+it} = x(1 - \cos t) + i(t - x \sin t)$$

Вычисление перестановки

- На первом (вертикальном) отрезке пути, имеем

$$r(t) = x + it$$

где x - вещественный корень уравнения $f(x) = 0$.

$$a(t) = x + it + e^{x+it} = x(1 - \cos t) + i(t - x \sin t)$$

- Это уравнение циклоиды. Эта циклоида не содержит особых точек, поскольку при $t = (2k+1)\pi$ (единственное значение t при котором мнимые части a_k и $a(t)$ совпадают),

$$a = 2x + i(2k+1)\pi$$

т.е. левее a_k

Вычисление перестановки

- Положим $y_n = (2n+1)\pi$. Тогда следующий (горизонтальный) отрезок пути задается

$$r(s) = s + iy_n + e^{s+iy_n} \Rightarrow a(s) = s - e^s + iy_n$$

Вычисление перестановки

- Положим $y_n = (2n+1)\pi$. Тогда следующий (горизонтальный) отрезок пути задается
$$r(s) = s + iy_n + e^{s+iy_n} \Rightarrow a(s) = s - e^s + iy_n$$
- $a(s)$ также движется горизонтально.

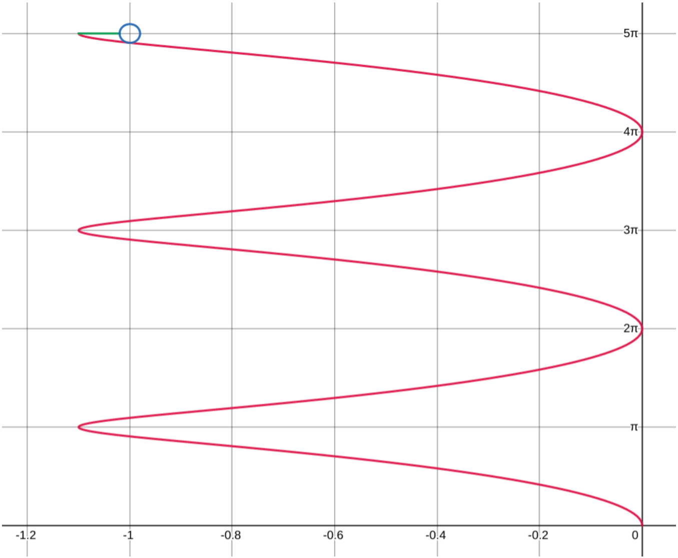
Вычисление перестановки

- Положим $y_n = (2n+1)\pi$. Тогда следующий (горизонтальный) отрезок пути задается

$$r(s) = s + iy_n + e^{s+iy_n} \Rightarrow a(s) = s - e^s + iy_n$$

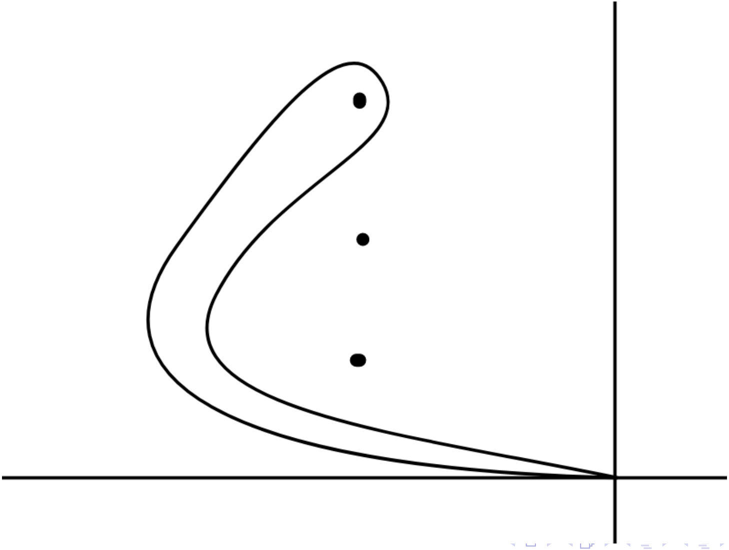
- $a(s)$ также движется горизонтально.
- Далее, когда корни меняются между собой, двигаясь по полуокрожностям, параметр a делает оборот вокруг особой точки a_n.

Вычисление перестановки



Вычисление перестановки

Эта петля гомотопна простейшей



Неразрешимость

Утверждение

Произвольная петля может быть представлена в виде произведения петель простейшего вида

Неразрешимость

Утверждение

Произвольная петля может быть представлена в виде произведения петель простейшего вида

Доказательство

Рассмотрим произвольную петлю. Мысленно представим, что особые точки - это гвозди, а петля - это резинка. Возьмем эту резинку и стянем ее к началу координат, так, что останутся лишь прямолинейные куски резинки, идущие от начала координат к какому-то гвоздю и обратно. Такие куски являются простейшими петлями, т.е. исходная петля действительно гомотопна произведению петель. Это рассуждение можно формализовать при помощи алгебраической топологии.

Неразрешимость

Утверждение

Группа, порожденная такими петлями - симметрическая

Неразрешимость

Утверждение

Группа, порожденная такими петлями - симметрическая

Доказательство

С одной стороны, в силу транзитивности группы, существует перестановка σ, которая отображает корень $r_k \mapsto r_l \ \forall k, l \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, эта перестановка раскладывается в произведение транспозиций вида $(1n)$. Стало быть существуют петли, которые индуцируют транспозиции $(1k)$ и $(1l)$. Значит произвольная транспозицию (kl) принадлежит группе.

Неразрешимость

Утверждение

Уравнение $x^x = a$ *не решается в элементарных функциях*

Неразрешимость

Утверждение

Уравнение $x^x = a$ не решается в элементарных функциях

- Корней бесконечно много

Неразрешимость

Утверждение

Уравнение $x^x = a$ *не решается в элементарных функциях*

- Корней бесконечно много
- Симметрическая группа неразрешима

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю, А.Я. Канель-Белову, за предложенные задачи и идеи их решения, А.С. Малистову, за численное решение задачи, которое позволило изобразить результаты графически, В.О. Мантурову, за приглашение сделать доклад на математическом коллоквиуме МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также гранту РНФ №17-11-01377, которым поддержано это исследование.

Библиография

Abel, Niels Henrik (1824). "Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré". In: *Grøndahl & Søn.*

Ritt, J. F. (1948). "Integration in finite terms. Liouville's theory of elementary methods". In: *N. Y.: Columbia Univ. Press.*

Ruffini, Paolo (1799). "Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto". In: *Stamperia di S. Tommaso d'Aquino.*

Vessiot, Ernest (1910). "Méthodes d'intégration élémentaires". In: *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.*

Хованский, А.Г. (2008). *Топологическая теория Галуа*. МЦНМО. ISBN: 978-5-94057-374-6.